Dodatna nastava iz matematike

Osnovni kurs elementarne geometrije

Predavač: A.Pejčev

1. Dokazati da u konveksnom petouglu postoje 3 dijagonale koje mogu biti ivice nekog trougla.
2. Neka su $AKLB$ i $ACPQ$ kvadrati spolja konstruisani nad ivicama AB i AC trougla ABC. Dokazati da se duži BP i CL seku u tački koja pripada visini trougla ABC iz temena A.
3. Neka je O proizvoljna tačka u trouglu ABC, takva da je $\angle OBA = \angle OCA$. Ako su P i Q podnožja upravnih iz te tačke na ivicama AB i AC, a A_1 središte ivice BC, dokazati da je $A_1P = A_1Q$.
4. Neka su P i Q tačke na ivicama AB i AC trougla ABC redom. Dokazati da težište tog trougla pripada duži PQ akko je $\frac{PB}{AP} + \frac{QC}{AQ} = 1$ (upamtiti).
5. Neka su H i O ortocentar i centar opisanog kruga trougla ABC. Ako je $AH = AO$, dokazati da je $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$.
6. Dokazati da su podnožja normala iz proizvoljne tačke P kruga opisanog oko trougla ABC, tri kolinearne tačke (**Simsonova prava tačke** P) (upamtiti).Dokazati i preko uglova i preko Menelajeve teoreme.
7. Neka je P proizvoljna tačka kruga opisanog oko trougla ABC i P_A presečna tačka prave upravne na pravoj BC kroz tu tavcku sa tim krugom. Dokazati da je prava AP_A paralelna Simsonovoj pravoj tačke P trougla ABC.
8. Ako su P i Q dve tačke kruga $k(O, r)$ opisanog oko trougla ABC i p,q njihove Simsonove prave tog trougla, dokazati da je $\angle pq = \angle POQ$.
9. Dokazati da Simsonova prava tačke P trougla ABC sadrži središte duži PH, gde je H njegov ortocentar (upamtiti).
10. Neka je $ABCD$ tetivan četvorougao. Dokazati da se Simsonova prave tačaka A, B, C, D u odnosu na trouglove BCD, CDA, DAB, ABC redom seku u jednoj tački.
11. Dokazati i upamtiti da je rastojanje između centara opisanog i upisanog kruga trougla ABC jednako $R^2 - 2Rr$, gde su R i r poluprečnici opisanog i upisanog kruga redom. Da se postavi slično tvrđenje za opisani i spolja upisani krug (**Ojlerova teorema**).
12. Ako su A i B dve tačke i d duž neke ravni, skup taˇcaka X te ravni takvih da je $AX^2 - BX^2 = d^2$ je prava upravna na AB. Dokazati.
13. Dokazati da su dijagonale četvorougla uzajamno normalne akko su zbirovi kvadrata naspramnih stranica medjusobno jednaki.
14. Neka je P unutrašnja tačka kvadrata $ABCD$ takva da je $PA : PB : PC = 1 : 2 : 3$. Izračunati ugao APB.
15. Neka su P, Q, R tačke pravih odre đenih ivicama BC,CA,AB trougla ABC. Dokazati da se upravne na pravama BC, CA, AB u tačkama P, Q, R seku u jednoj tački akko je
$$BP^2 - PC^2 + CQ^2 - QA^2 + AR^2 - RB^2 = 0$$
16. Neka su A i B zajedničke tačke, a PQ zajednička tangenta dva kruga u dodirnim tačkama P i Q. Dokazati i upamtiti da središte duži PQ pripada pravoj AB.
17. Dokazati i upamtiti da se potencijalne ose tri kruga seku u jednoj tački.

18. Neka je k krug i S tačka van tog kruga neke ravni .Ako su P i Q dodirne tačke tangenti iz S na krugu k, a X i Y presečne tačke neke prave s kroz S sa krugom k dokazati da je $\frac{XP}{YP} = \frac{XQ}{YQ}$ (zapamtiti).

19. Ako je T težište ,a X proizvoljna tačka u ravni trougla ABC dokazati da je $XA^2+XB^2+XC^2 = TA^2 + TB + TC^2 + 3TX^2$ (**Lajbnicova teorema**).

20. Ako su a, b, c ivice, s poluobim i l_a odsečak bisektrise unutrašnjeg ugla naspram ivice a trougla ABC, dokazati i upamtiti da je $l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)}$.

21. Dokazati da u raznostranom trouglu ABC tangente opisanog kruga u temenima seku naspramne ivice u kolinearnim tačkama.

22. Ako je a ivica, a D i d duža i kraća dijagonala pravilnog sedmougla dokazati da je $\frac{1}{a} = \frac{1}{D} + \frac{1}{d}$.

23. Neka su ABC i $A_1B_1C_1$ dva trougla neke ravni, takva da se prave AA_1, BB_1, CC_1 seku u jednoj tački S. Ako se prave BC i B_1C_1,AC i A_1C_1, AB i A_1B_1 seku redom u tačkama P, Q, R, dokazati da su one kolinearne (**Dezargova teorema**). Važi i obrnut smer.

24. Neka su $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ proizvoljne tačke datog kruga dokazati da su presečne tačke pravih A_1B_2 i B_1A_2, A_1B_3 i B_1A_3, A_2B_3 i B_2A_3 kolinearne (**Paskalova teorema**).

25. Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao Dokazati da je $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \geq AC^2 + BD^2$(prethodno izračunati dužinu duži koja spaja središta dijagonala).

26. Neka je $ABCD$ tetivni šestougao. Dokazati da se dijagonale AD, BE, CF seku u jednoj tački akko je $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.

27. Neka je $ABCD$ tetivni četvorougao kod kojeg je $CD = BC + AD$. Dokazati da se simetrale unutrašnjih uglova kod temena A i B seku na CD.
    Casey-ova teorema Neka krugovi $k_1, k_2, k_3,_4$ dodiruju krug k u tačkama A_1, A_2, A_3, A_4, tako da na krugu k par tačaka (A_1A_3) deli par tačaka (A_2, A_4). Označimo sa t_{ij}, i,j $\in \{1, 2, 3, 4\}$ dužinu zajedničke tangente krugova k_i i k_j, pri čemu ako k_i i k_j dodiruju k oba sa spoljne ili oba sa unutrašnje strane, onda razamatramo zajedničku spoljašnju tangentu, u suprotnom zajedničku unutrašnju. Tada je
    $$t_{12}t_{34} + t_{14}t_{23} = t_{13}t_{24}$$
    Tačka se može smatrati degenerisanim krugom!

28. Dokazati da Ojlerov krug trougla dodiruje upisani i spolja upisane krugove tog trougla (**Fojerbahova teorema**).

29. Naći tačku u trouglu za koju je zbir rastojanja od temena datog trougla minimalan (**Toričelijeva tačka**).

30. Neka je S središte tetive PQ kruga k. Ako su AB i CD dve tetive tog kruga koje sadrže tačku S i X, Y preseci tetiva AD i BC sa teivom PQ, dokazati da je S središte duži XY (**teorema o leptiru**).

31. Ako je S presečna tačka dijagonala AC i BD konveksnog četvorougla $ABCD$, a P i Q cetri opisanih krugova oko trouglova ASB i CSD, dokazati da je $AB + CD \leq 4PQ$

32. Neka je $ABCD$ tetivan četvorougao. Dokazati da je $\mid AB-CD \mid + \mid AD-BC \mid \geq 2 \mid AC-BD \mid$.

33. Dokazati i upamtiti sledeća tvrđenja:
    (a) Zbir rastojanja centra opisanog kruga oštrouglog trougla od njegovih ivica, jednak je zbiru poluprečnika opisanog i upisanog kruga.
    (b) Zbir rastojanja ortocentra oštrouglog trougla od njegovih temena, jednak je zbiru prečnika opisanog i upisanog kruga tog trougla.